10ο 17/12/2019

Παλινδρόμηση και ανάλυση διακύμανσης

7/1/2020
Μάθημα

Μοντέλο: $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ $\quad i=1,\dots,I,\ j=1,\dots,J$

ΕΕΤ: $\hat{\mu} = \bar{Y}_{\cdot\cdot}$, $\hat{\alpha}_i = \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}$, $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{\cdot j} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}$

Υποθέσεις για σφάλματα: $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$ ασυσχέτιστα $\longrightarrow Y_{ij} \sim N(\mu+\alpha_i+\beta_j, \sigma^2)$ ασυσχέτιστα.

Πλευρικές συνθήκες: $\sum_i \alpha_i = \sum_j \beta_j = 0.$

Ιδιότητες εκτιμητών: ① $E(\hat{\mu}) = \mu$, $E(\hat{\alpha}_i) = \alpha_i$, $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$

② Οι ΕΕΤ ≡ ΕΜΠ.

Αποδ

Οι ΕΕΤ προκύπτουν από ελαχ. ως προς μ, α_i, β_j με $i=1,\dots,I$, $j=1,\dots,J$

$$S = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 = \sum_i \sum_j (Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2$$

Εύρεση ΕΜΠ

Είναι $Y_{ij} \sim N(\mu+\alpha_i+\beta_j, \sigma^2)$ $\quad i=1,\dots,I$, $j=1,\dots,J$

Άρα $f_{Y_{ij}}(y_{ij}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)^2}$ για $i=1,\dots,I$, $j=1,\dots,J$

Πιθανοφάνεια $= L = L(\mu, \alpha_i, \beta_j) \overset{\text{ορ}}{=}$ Η από κοινού κατανομή των παρατηρήσεων Y_{ij} $\quad i=1,\dots,I$, $j=1,\dots,J$.

$$\underset{\text{ανεξ.}}{\overset{Y_{ij}}{=}} \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} f_{Y_{ij}}(y_{ij}) = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)^2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^{IJ}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)^2} \quad (1)$$

Οι ΕΜΠ των μ, α_i, β_j προκύπτουν από τη μεγιστοποίηση της L ή του $\log L$.

ή τη μεγιστοποίηση ως προς μ, α_i, β_j του $\log L = -IJ\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(y_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j)^2$ (*)

ή την ελαχιστοποίηση ως προς μ, a_i, β_j του $\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mu - a_i - \beta_j)^2$.

Παρατηρώ ότι οι ΕΕΤ και οι ΕΜΠ προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της ίδιας ποσότητας. Άρα ταυτίζονται.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Ποιός ο εκτιμητής (ΕΜΠ) της σ^2?

<u>Απ</u>

Προκύπτει από την μεγιστοποίηση της (*) ως προς σ^2, αφού πριν αντικατασταθούν τα μ, a_i, β_j από τους εκτιμητές τους $\hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$, $\hat{a}_i = \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}$, $\hat{\beta}_j = \bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}$

για $i = 1, .., I$, $j = 1, .., J$ θα προκύψει ότι ΕΜΠ της σ^2 είναι: $\hat{\sigma}^2 = \frac{SSres}{IJ}$.

---

③ Πίνακας ΑΝΑΔΙΑ του μοντέλου ανάλυσης διακύμανσης κατά δυο παράγοντες.

$$SStot = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (Y_{ij} - \bar{Y}_{..})^2 \overset{\text{πράξεις}}{=} J\sum_{i=1}^{I}(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2 + I\sum_{j=1}^{J}(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\underbrace{(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..})^2}_{(e_{ij})^2}$$

$\pm \bar{Y}_{i.} \pm \bar{Y}_{.j}$

προσθαφαιρώ $Y_{i.}$ και $Y_{.j}$

$$\Rightarrow SStot = SS_A + SS_B + SSres.$$

<u>Υπόλοιπα</u>: $e_{ij} = Y_{ij} - \hat{Y}_{ij}$

$$= Y_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{a}_i + \hat{\beta}_j) = Y_{ij} - \bar{Y}_{..} - \bar{Y}_{i.} + \bar{Y}_{..} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}$$

$$\Rightarrow \boxed{e_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{.j} + \bar{Y}_{..}}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ (κατά δυο παράγοντες)

Πηγή Μεταβλητότητας	SS	β.ε	MS	F-πηλίκο
Παράγοντας A	SS_A	$I-1$	$MS_A = \frac{SS_A}{I-1}$	$F_A = \frac{MS_A}{MSres}$
Παράγοντας B	SS_B	$J-1$	$MS_B = \frac{SS_A}{J-1}$	$F_B = \frac{MS_B}{MSres}$
Υπόλοιπα	$SSres$	$(I-1)(J-1)$	$MSres = \frac{SSres}{(I-1)(J-1)}$	
Ολική	$SStot$	$IJ-1$		

ΠΡΟΤΑΣΗ Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα και τις πλευρικές συνθήκες

α) $E(MS_A) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1} \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2$

β) $E(MS_B) = \sigma^2 + \frac{I}{J-1} \sum_{j=1}^{J} \beta_j^2$

γ) $E(MS_{res}) = \sigma^2$.

Αποδ

α) $E(SS_A) = E\left(J \sum_{i=1}^{I} (\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2\right) = J \sum_{i=1}^{I} E(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 = J \cdot \sum_{i}^{I} \left[Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) + [E(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})]^2 \right]$

$\Rightarrow E(SS_A) = J \sum_i Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) + J \sum_i (E(\hat{\alpha}_i))^2$

$\Rightarrow \boxed{E(SS_A) = J \sum_i Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) + J \sum_i \alpha_i^2.}$ (1)

$\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} = \bar{Y}_{i\cdot} - \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \bar{Y}_{i\cdot} = -\frac{1}{I} \bar{Y}_{1\cdot} - \frac{1}{I} \bar{Y}_{2\cdot} - \dots + \frac{I-1}{I} \bar{Y}_{i\cdot} - \dots - \frac{1}{I} \bar{Y}_{I\cdot}$

$Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) = Var\left(-\frac{1}{I} \bar{Y}_{1\cdot} - \frac{1}{I} \bar{Y}_{2\cdot} - \dots + \frac{I-1}{I} \bar{Y}_{i\cdot} - \dots - \frac{1}{I} \bar{Y}_{I\cdot} \right)$

$\underset{\text{ανεξ}}{\overset{Y_{ij}}{=}} \underbrace{\frac{1}{I^2} Var(\bar{Y}_{1\cdot}) + \dots + \frac{(I-1)^2}{I^2} Var(\bar{Y}_{i\cdot}) + \dots + \frac{1}{I^2} Var(\bar{Y}_{I\cdot})}$ (2)

$\bar{Y}_{i\cdot} \overset{\text{ορ}}{=} \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} Y_{ij}$ ⇝ Άρα $Var(\bar{Y}_{i\cdot}) = Var\left(\frac{1}{J} \sum_j Y_{ij}\right) = \frac{1}{J^2} Var\left(\sum_j Y_{ij}\right)$

$\underset{\text{ανεξ}}{\overset{Y_{ij}}{=}} \frac{1}{J^2} \sum_j Var(Y_{ij}) = \frac{1}{J^2} \sum_{j=1}^{J} \sigma^2$

$\Rightarrow \underbrace{Var(\bar{Y}_{i\cdot}) = \frac{\sigma^2}{J}}$, $i = 1, \dots, I$ (3)

Από (2),(3) έχουμε $Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) = \frac{1}{I^2} \frac{\sigma^2}{J} + \dots + \frac{(I-1)^2}{I^2} \frac{\sigma^2}{J} + \dots + \frac{1}{I^2} \frac{\sigma^2}{J}$

$= \frac{(I-1)\sigma^2}{I^2 J} + \frac{(I-1)^2}{I^2 J} \sigma^2$. 3

$\Rightarrow Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) = \frac{1}{I^2 J} (I - 1 + (I-1)^2) \sigma^2$

$\Rightarrow Var(\bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot}) = \frac{I-1}{IJ} \sigma^2$ (4)

Από (1),(4) έχουμε $E(SS_A) = J \sum_{i=1}^{I} \frac{I-1}{IJ} \sigma^2 + J \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2 \Rightarrow E(SS_A) = (I-1)\sigma^2 + J \sum_{i=1}^{I} \alpha_i^2$ (5)

Τελικά $E(MSA) = E\left(\frac{SSA}{I-1}\right)$

$$= \frac{1}{I-1} E(SSA) \overset{(5)}{=} \frac{1}{I-1}\left[(I-1)\sigma^2 + J\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2\right]$$

$$\Rightarrow E(MSA) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2.$$

β) Ανάλογη με αυτή του α)

(Σκιαγράφηση)

γ) Βασίζεται στο $E(SStot) = J\sum_i \alpha_i^2 + I\sum_j \beta_j^2 + (IJ-1)\sigma^2$.

και έτσι $E(SSres) = E(SStot) - E(SSA) - E(SSB)$.

......

Από την ΠΡΟΤΑΣΗ παρατηρώ ότι $E(MSA) = E(MSres)$ αν $\alpha_1 = \dots = \alpha_I = 0$

Επίσης $E(MSB) = E(MSres)$ αν $\beta_1 = \dots = \beta_J = 0$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Υπό τις υποθέσεις για τα σφάλματα και τις πλευρικές συνθήκες

α) $\frac{SSres}{\sigma^2} \sim X^2_{(I-1)(J-1)}$

β) $\frac{SSA}{\sigma^2} \sim X^2_{I-1}$, υπό την $H_0^A: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$

γ) $\frac{SSB}{\sigma^2} \sim X^2_{J-1}$, υπό την $H_0^B: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$

<u>Αποδ</u>

α) $Y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}(Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 \sim X_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}(Y_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 \sim X_I^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}(Y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_j)^2 \sim X^2_{I-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{I}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 \sim X^2_{I-1}$$

Ανάλογα $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{J}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 \sim X^2_{J-1}$

$$\frac{1}{\sigma^2}\underbrace{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot j} + \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2}_{SSres} \sim X^2_{(I-1)(J-1)}$$

4

β) Επειδή $Y_{ij} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2)$ και ανεξ.

$\bar{Y}_{i\cdot} \sim N(\mu + \alpha_i + \sum_j^J \beta_j, \frac{\sigma^2}{J})$

Υπο την $H_0^A: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$ και υπο την πλευρική συνθήκη $\sum_j \beta_j = 0$

το $\bar{Y}_{i\cdot} \sim N(\mu, \sigma^2/J)$

Άρα $\frac{\bar{Y}_{i\cdot} - \mu}{\sigma/\sqrt{J}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \frac{J(\bar{Y}_{i\cdot} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim X_1^2 \Rightarrow \frac{J \sum_{i=1}^{I} (\bar{Y}_{i\cdot} - \mu)^2}{\sigma^2} \sim X_I^2$$

$$\frac{J \sum_{i=1}^{I} (\bar{Y}_{i\cdot} - \hat{\mu})^2}{\sigma^2} \sim X_{I-1}^2 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} SS_A \sim X_{I-1}^2.$$

Έλεγχος Υποθέσεων - Πολλαπλές Συγκρίσεις.

Για τον έλεγχο της $H_0^A: \alpha_1 = \dots = \alpha_I \ (=0)$

η ΣΣΤ του τεστ είναι:

$F_A = \frac{MS_A}{MS_{res}}$ με κατανομή $F_{I-1,(I-1)(J-1)}$ υπό H_0^A

και κ.π. $F_{I-1,(I-1)(J-1),\alpha}$.

Για τον έλεγχο της $H_0^B: \beta_1 = \dots = \beta_J \ (=0)$

η ΣΣΤ είναι:

$F_B = \frac{MS_B}{MS_{res}}$ με κατανομή $F_{J-1,(I-1)(J-1)}$ υπό H_0^B

και κ.π $F_B \geq F_{J-1,(I-1)(J-1),\alpha}$.

Αν κάποια από τις H_0^A και H_0^B ή και οι δύο απορριφθούν, τότε συνεχίζουμε με πολλαπλές συγκρίσεις με κορυφαία τη μέθοδο της ΕΣΔ.

Μέθοδος ΕΣΔ για το A

Η $H_0: a_i = a_{i'}$ $i, i' = 1, .., I$ για $i \neq i'$

απορρίπτεται: αν:

$$|\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot}| \geq ΕΣΔ \overset{op}{=} t_{(I-1)(J-1), \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2MS_{res}}{J}}$$

Αν η H_0 $a_i = a_{i'}$ απορριφθεί, τότε

Αν $\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot} > 0$ το i-επίπεδο καλύτερο του i'

Αν $\overline{Y}_{i\cdot} - \overline{Y}_{i'\cdot} < 0$ το i'-επίπεδο -//- του i

Μέθοδος ΕΣΔ για το B

Η $H_0: \beta_j = \beta_{j'}$ $j, j' = 1, .., J$ για $j \neq j'$

απορρίπτεται αν:

$$|\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'}| \geq ΕΣΔ \overset{op}{=} t_{(I-1)(J-1), \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{2MS_{res}}{I}}$$

Αν η $H_0: \beta_j = \beta_{j'}$ απορριφθεί τοτε

Αν $\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'} > 0$ το j-επίπεδο καλυτερο του j'.

Αν $\overline{Y}_{\cdot j} - \overline{Y}_{\cdot j'} < 0$ το j'-επίπεδο -//- του j.

Μέθοδος Γραμμικών αντιθέσεων ή Scheffe.

Έστω η γραμμική αντιθεση στα επίπεδα του παράγοντα A

η $L_A = \sum_{i=1}^{I} c_i a_i$, με $\sum_{i=1}^{I} c_i = 0$.

Για τον έλεγχο της $H_0: L_A = 0$

η ΣΣΤ είναι $F_{L_A} = \frac{MS_{L_A}}{MS_{res}}$, $MS_{L_A} = \frac{\hat{L}_A^2}{\frac{1}{J}\sum_{i=1}^{I} c_i^2}$.

$\hat{L}_A^2 = \sum_{i=1}^{J} c_i \overline{Y}_{i\cdot}$ με κατανομή $F_{1,(I-1)(J-1)}$

υπό την $H_0: L_A = 0$ και κπ. $F_{L_A} \geq F_{1(I-1)(J-1), \alpha}$.

Έστω η γραμμική αντίθεση στα επίπεδα του παράγοντα B

η $L_B = \sum_{j=1}^{J} c_i \overline{Y}_{i\cdot}$ με $\sum c_j = 0$

$\hat{L}_B^2 = \sum_{j=1}^{J} c_j \overline{Y}_{\cdot j}$

Για τον έλεγχο $H_0: L_B = 0$ η ΣΣΤ είναι $F_{L_B} = \frac{MS_{L_B}}{MS_{res}}$, $MS_{L_B} = \frac{\hat{L}_B^2}{\frac{1}{I}\sum c_j^2}$, $F_{1,(I-1)(J-1)}$ υπο $H_0: L_B = 0$

κπ. $F_{L_B} \geq F_{1(I-1)(J-1), \alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 4 διαφορετικών καυσίμων
3 -//- Τρόπως εκτόξευσης
Ποίω στο βεληνεκές κάποιου τύπου ρουκέτας.

Τα δεδομένα:

Τροπος εκτοξ \ Καυσιμα (B)	1	2	3	4
1	45,9	57,6	52,2	41,7
(A) 2	46	51	50,1	38,8
3	45,7	56,9	55,3	48,1

Έστω Y=βεληνεκές , Y 2-παράγοντες

A = Τρόπος εκτόξευσης σε 3 επίπεδα

B = καύσιμο σε 4 επίπεδα.

Μοντέλο: $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ $i=1,2,3$ $(I=3)$

$j=1,2,3,4$ $(J=4)$

ΑΝΑΔΙΑ

Πηγή μεταβλ.	SS	β.ε	MS	F-πηλίκο
A τροπος εκτοξ	$SS_A = 50,852$	$I-1=2$	25,426	$F_A = 4,428$
B καυσιμα	$SS_B = 293,702$	$J-1=3$	97,9	$F_B = 17,048$
Υπόλοιπα	$SS_{res} = 34,455$	$(I-1)(J-1)=6$	5,743	
ολική	$SS_{tot} = 379,009$	11		

Για έλεγχο $H_0^A: \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ παρατηρώ ότι $F_A = 4,428 < F_{2,6,0.05} = 10,9$

$< F_{2,6,0.01} = 5,14$

Άρα H_0^A δεν μπορεί να απορρ.

Άρα οι τρόποι εκτόξευσης δεν επηρεάζουν το βεληνεκές.

Για έλεγχο $H_0^B: \beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$ παρατηρώ ότι $F_B = 17,048 > F_{3,6,0.05} = 4,76$

$F_{3,6,0.01} = 9,78$

Άρα H_0^B απορρ. → Πολλαπλές Συγκρίσεις.

$\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 2} = -9{,}3$

$\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 3} = -6{,}66$

$\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 3$

$\bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 3} = 2{,}634$

$\bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 12{,}3$

$\bar{Y}_{\cdot 3} - \bar{Y}_{\cdot 4} = 9{,}67$

$$ΕΣΔ = t_{6,0.025} \cdot \sqrt{\frac{2MS_{res}}{I}} = \dots = 4{,}793$$

$|\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 2}| > ΕΣΔ$. Άρα απορρ $\beta_1 = \beta_2$.

Επειδή $\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 2} < 0$ $\beta_2 > \beta_1$

καλύτερο ή σημαντικότερο

$|\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 3}| > ΕΣΔ$. Άρα απορρ. $\beta_1 = \beta_3$

Επειδή $\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 3} < 0$ το $\beta_3 > \beta_1$

$|\bar{Y}_{\cdot 1} - \bar{Y}_{\cdot 4}| < ΕΣΔ$. Άρα <u>δεν</u> απορρ $\beta_1 = \beta_4$

Άρα $\beta_1 \simeq \beta_4$

$|\bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 3}| < ΕΣΔ$ =//= $\beta_2 \simeq \beta_3$

$|\bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 4}| > ΕΣΔ$ ... απορρ. $\beta_2 = \beta_4$

Επειδή $\bar{Y}_{\cdot 2} - \bar{Y}_{\cdot 4} > 0$ το $\beta_2 > \beta_4$

$|\bar{Y}_{\cdot 3} - \bar{Y}_{\cdot 4}| > ΕΣΔ$ απορρ $\beta_3 = \beta_4$

Επειδη $\bar{Y}_{\cdot 3} - \bar{Y}_{\cdot 4} > 0$ το $\beta_3 > \beta_4$

Τελικά $\beta_1 \cong \beta_4$ και $\beta_2 \cong \beta_3$

$\left.\begin{array}{l} \beta_1 \text{ χειρότερο από } \beta_2 = \beta_3 \\ \beta_4 \text{ χειρότερο από } \beta_2 = \beta_3 \end{array}\right\}$ Διαλέγω το β_2 ή το β_3.